КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Решение задач по теме 1:

«Операторы, их собственные функции и собственные значения»

Основные понятия, законы и формулы

Пусть задано действие, с помощью которого из одной функции ψ получается другая функция φ

$$\hat{L}\psi = \varphi,$$

тогда говорят, что задан *оператор* $\hat{L}$.

Действия над операторами:

Сумма – оператор $\hat{L} = \hat{L}_1 + \hat{L}_2$, такой, что

$$\hat{L}\psi = \left(\hat{L}_1 + \hat{L}_2\right)\psi = \hat{L}_1\psi + \hat{L}_2\psi .$$

Произведение – оператор $\hat{L} = \hat{L}_1 \cdot \hat{L}_2$, такой, что

$$\hat{L}\psi = \hat{L}_1 \cdot \hat{L}_2\psi = \hat{L}_1\left(\hat{L}_2\psi\right).$$

Единичный оператор $\hat{I}$ – такой оператор, что для любой функции ψ выполняется

$$\hat{I}\psi = \psi .$$

Обратный оператор $\hat{L}^{-1}$ по отношению к оператору $\hat{L}$ определяется соотношением

$$\hat{L}\hat{L}^{-1} = \hat{L}^{-1}\hat{L} = \hat{I}$$

Оператор $\hat{L}$ называется *линейным*, если он удовлетворяет соотношению

$$\hat{L}\left(C_1\psi_1 + C_2\psi_2\right) = C_1\hat{L}\psi_1 + C_2\hat{L}\psi_2,$$

где C_1 и C_2 – постоянные.

Если для некоторой функции ψ, непрерывной, однозначной, конечной и интегрируемой вместе со своим квадратом во всей области изменения своего аргумента, выполняется соотношение

$$\hat{L}\psi = \lambda\psi ,$$

то ψ называется *собственной функцией* оператора $\hat{L}$, а λ – *собственным значением* этого оператора.

Скалярным произведением функций называется

$$(\psi,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\varphi(x)dx ,$$

где звездочка означает комплексное сопряжение.

Свойства скалярного произведения

$(\psi,\varphi) = (\varphi,\psi)^*$,

$(\psi,\varphi_1 + \varphi_2) = (\psi,\varphi_1) + (\psi,\varphi_2)$, $\quad (\psi_1 + \psi_2,\varphi) = (\psi_1,\varphi) + (\psi_2,\varphi)$,

$(\lambda\psi,\varphi) = \lambda^*(\psi,\varphi)$, $\quad (\psi,\lambda\varphi) = \lambda(\psi,\varphi)$, при $\lambda = const$.

Выражение

$$(\psi,\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx$$

называется *нормой* функции.

Для ортонормированных функций дискретного спектра

$$(\psi_n,\psi_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)\psi_k(x)dx = \delta_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{при } n = k, \\ 0, & \text{при } n \neq k. \end{cases}.$$

Для ортонормированных функций непрерывного спектра

$$(\psi(x,\lambda),\psi(x,\mu)) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,\lambda)\psi(x,\mu)dx = \delta(\lambda - \mu),$$

где δ-функция:

$$\delta(x-a)=\begin{cases}\infty, & \text{при} \quad x=a,\\ 0, & \text{при} \quad x\neq a.\end{cases}$$

δ -функция имеет свойства

$$\int_b^c \delta(x-a)dx=\begin{cases}1, & \text{если} \quad b<a<c,\\ 0, & \text{если} \quad b>a, \text{или } a>c.\end{cases}$$

$$\int_b^c f(x)\delta(x-a)dx=\begin{cases}f(a), & \text{если} \quad b<a<c,\\ 0, & \text{если} \quad b>a, \text{или } a>c.\end{cases}$$